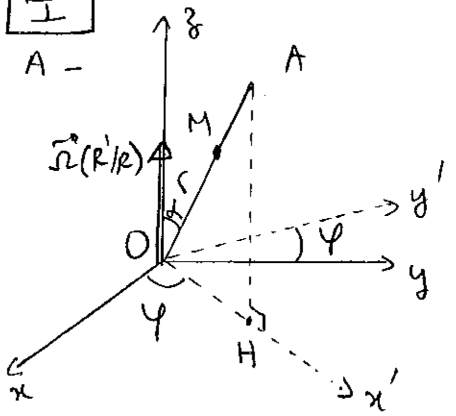
EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT _ L1PCP _ 21 Mai 2012

I

A -



a) $\vec{\Omega}(R'/R) = \omega\, \vec{e}_z$

b) Réf. galiléen = en translation rectiligne et uniforme par rapport à un autre Réf galiléen, ĉ le réf. de Copernic (centre = cdm syst. solaire) ou Képler (centre = cdm soleil).

ou = référentiel dans lequel s'applique le principe de l'inertie (ou 1ère loi de Newton).

R = galiléen (Déf. de R = voir énoncé).

R' = en rotation / R ⇒ non galiléen.

c) $*\ \Sigma \vec{F}(M/R) = \vec{P} + \vec{R} = -mg\vec{e}_z + (R_\alpha \vec{e}_\alpha + R_{y'}\vec{e}_{y'})$

($\vec{R} \perp \vec{e}_r$, car mvt sans frottement)

$*\ \Sigma \vec{F}(M/R') = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{ie}}(M, R'/R) + \vec{F_{ic}}(M, R'/R)$

$\vec{F_{ic}}(M, R'/R) = -2m\,\vec{\Omega}(R'/R) \times \vec{v}(M/R') = -2m\omega \vec{e}_z \times \dot{r}\vec{e}_r = -2m\omega \dot{r} \sin\alpha\, \vec{e}_{y'}$

$\vec{F_{ie}}(M, R'/R) = -m\left\{ \underbrace{\vec{a}(O' \in R'/R)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right]_R}_{=\vec{0}} \times \vec{O'M} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{O'M}) \right\}$

$= -m\omega^2 r\, \vec{e}_z \times (\sin\alpha\, \vec{e}_{y'}) = +m\omega^2 r \sin\alpha\, \vec{e}_{x'}$

B - a) $\Sigma \vec{F}(M/R') = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} = m\vec{a}(M/R')$

b) Eq ds R' ⇒ $\vec{a}(M/R') = \vec{0}$, $\vec{v}(M/R') = \vec{0}$ ⇒ $\vec{F_{ic}} = \vec{0}$

⇒ $-\cancel{m}g\, \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r + \cancel{m}\omega^2 r_{eq} \sin^2\alpha = 0$ ⇒ $r_{eq} = \dfrac{g}{\omega^2 \tan\alpha \sin\alpha}$

c) $-mg\vec{e}_z + R_\alpha \vec{e}_\alpha + R_{y'}\vec{e}_{y'} - 2m\left(\frac{\omega}{2}\right)\dot{r}\sin\alpha\, \vec{e}_{y'} + m\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 r \sin\alpha\, \vec{e}_{x'} = m\ddot{r}\,\vec{e}_r$

⇒ $-g\cos\alpha + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 r \sin^2\alpha = \ddot{r}$ ⇒ $\ddot{r} - \left(\frac{\omega \sin\alpha}{2}\right)^2 r = -g\cos\alpha$

d) $r(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} + \left(\dfrac{g\cos\alpha}{\Omega^2}\right)$ et $\Omega = \dfrac{\omega \sin\alpha}{2}$

$r(0) = r_{eq}$, $\dot{r}(0) = 0$ ⇒ $A = B = \dfrac{1}{2}\left(r_{eq} - \dfrac{g\cos\alpha}{\Omega^2}\right)$

Donc $r(t) = \left(\dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} - \dfrac{4g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\right) \mathrm{ch}\,\Omega t + \dfrac{4g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}$

⇒ $r(t) = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\left(-3\,\mathrm{ch}\,\Omega t + 4\right)$ et $r(t_0) = 0$ ⇒ $t_0 = \dfrac{1}{\Omega}\,\mathrm{Arch}\,\dfrac{4}{3}$

C - a) Une force est conservative si son travail est indépendant du chemin suivi. C'est le cas de $\vec{P}$ et $\vec{F_{ie}}$ (cours). $\vec{R}$ et $\vec{F_{ic}}$ ne travaillent pas ($\perp \vec{e}_r$).

b) $\delta W(\vec{F}) = -d\mathcal{E}_p = \vec{F} \cdot \vec{dl}$

$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{dl} = -mg\vec{e}_z \cdot dr\,\vec{e}_r = -mg\cos\alpha\, dr$ ⇒ $\mathcal{E}_{pp} = mgr\cos\alpha + c$

$\delta W(\vec{F_{ie}}) = \vec{F_{ie}} \cdot \vec{dl} = m\omega^2 r \sin\alpha\, \vec{e}_{x'} \cdot dr\,\vec{e}_r = m\omega^2 r \sin^2\alpha\, dr$ ⇒ $\mathcal{E}_{pie} = -\dfrac{m\omega^2 r^2 \sin^2\alpha}{2} +$

Donc $\mathcal{E}_p = mgr\cos\alpha - m\dfrac{\omega^2 r^2 \sin^2\alpha}{2} + cte$

c) Equilibre $\Rightarrow \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\right)_{req} = 0 \iff mg\cos\alpha - m\omega^2 r'_{eq}\sin^2\alpha = 0$

$\Rightarrow r'_{eq} = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} = r_{eq}$ ← NORMAL !.

d) Equilibre stable $\Rightarrow \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2}\right)_{req} > 0$.

Or, $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dr^2} = -m\omega^2\sin^2\alpha < 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$ Eq. instable.

e) $\mathcal{E}_p = mgr\cos\alpha - \frac{m}{2}\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 r^2\sin^2\alpha + cte$

$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$

TPM : $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{non\,cons}) = \underbrace{\mathcal{P}(\vec{R})}_{=0} + \underbrace{\mathcal{P}(\vec{F}_{ic})}_{=0}$ (Ne travaillent pas).

Donc $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \iff \frac{d\mathcal{E}_p}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \cancel{m}g\dot{r}\cos\alpha - \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}}\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\cancel{2}r\dot{r}\sin^2\alpha + \cancel{m}\dot{r}\ddot{r} =$

Cas général, $\dot{r} \neq 0 \Rightarrow \ddot{r} - \left(\frac{\omega\sin\alpha}{2}\right)^2 r = -g\cos\alpha$ <u>CQFD</u>

II

A-a) $\sum\vec{F}_{ex}(S/R) = \vec{F}_{int}(T \to S) = -\frac{GmM_T}{ST^2}\frac{\vec{TS}}{TS} = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{e}_r$.

b) $\vec{\mathcal{L}}_T(S/R) = \vec{TS} \times m\vec{v}(S/R)$

c) TMC : $\left[\frac{d\vec{\mathcal{L}}_T}{dt}(S/R)\right]_R = \vec{\mathcal{M}}_T(\vec{F}^{ext}(S/R)) = \vec{TS} \times \vec{F}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathcal{L}}_T(S/R) = \vec{cte}$

Donc $\vec{\mathcal{L}}_T$ garde une direction fixe $\Rightarrow \vec{TS}$ et $\vec{v}(S/R) \in$ tjs au m̂ plan.

$\Rightarrow$ le mvt est plan, dans un plan contenant T.

B-a) mvt circulaire $\Rightarrow \rho = TS = R_T + h = cte \Rightarrow \vec{v} = \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ et $\vec{a} = \rho(\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho)$

b) RFD $\Rightarrow \vec{F}_{int} = m\vec{a} \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega = cte \Rightarrow \vec{a} = -\frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\vec{e}_\rho$

mvt circulaire $\Rightarrow a_t = 0$ et $a_n = \frac{v^2}{R_c} = \frac{v^2}{R_T+h} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$

$\vec{a}(M/R) = -\frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\vec{e}_\rho$, $\vec{v}(M/R) = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}\,\vec{e}_\varphi$.

c) $T_0 = \frac{2\pi(R_T+h)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$

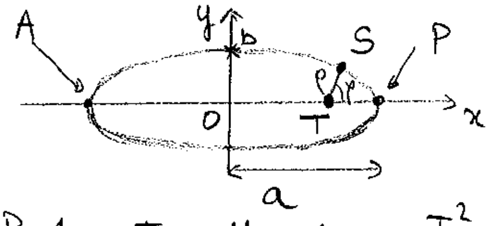
d) Satellite géostationnaire, si à tt instant, est au-dessus du m̂ pt de la Terre.

e) $(R_T+h)^3 = \left(\frac{T_0^2 GM_T}{4\pi^2}\right) \Rightarrow h = \left(\frac{T_0^2 GM_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T = 35.898$ km

C-a) $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R_T+h}$, $d\mathcal{E}_p = -\vec{F}_{int}\cdot\vec{dl} \Rightarrow \mathcal{E}_p = -\frac{GmM_T}{R_T+h} + \cancel{cte} \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{R_T+h}$

b) $\mathcal{E}' = -\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{a}$, $\mathcal{E}'_p = -\frac{GmM_T}{a} \Rightarrow \mathcal{E}'_c = \mathcal{E}' - \mathcal{E}'_p = +\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{a}$

D-



$C = \frac{\|\vec{\mathcal{L}}_T\|}{m} = \rho^2\dot{\varphi}$ = cte des aires

En A et P, $\vec{r} \perp \vec{v} \Rightarrow C = \rho_A v_A = \rho_P v_P$

$\rho_A > \rho_P \Rightarrow v_A < v_P$

Pr 1 centre attracteur, $\frac{T^2}{a^3} = cte \Rightarrow a = (R_T+h)\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3} \simeq 10.574$ km.